

FORMULAIRE

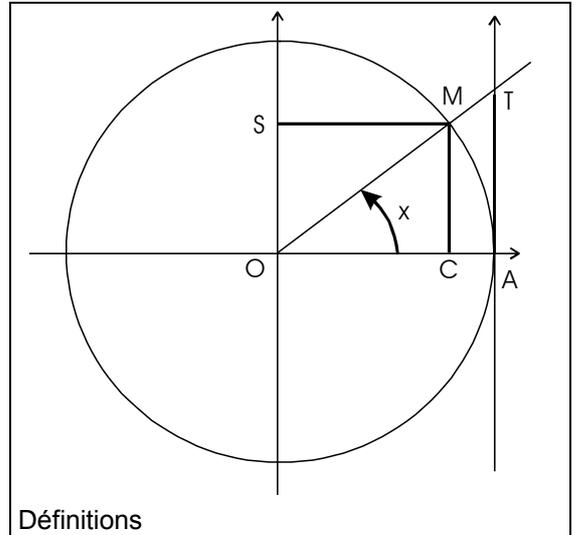
1. Trigonométrie

1.1 Définitions

$$x \text{ (en rad)} = \frac{AM}{OC}$$

$$\cos x = \frac{OC}{OM} \quad \operatorname{tg} x = \tan x = \frac{AT}{OM}$$

$$\sin x = \frac{OS}{OM} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$



1.2 Formules d'Euler

$$\exp(jx) = e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

1.3 Formules utiles

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty_-$	0

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$2 \cos(X) \cos(Y) = \cos(X+Y) + \cos(X-Y)$$

$$2 \sin(X) \sin(Y) = \cos(X+Y) - \cos(X-Y)$$

$$2 \sin X \cos(Y) = \sin(X+Y) + \sin(X-Y)$$

2. Nombres complexes

Forme algébrique : $z = x + jy \quad j^2 = -1$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta) = \rho e^{j\theta}$

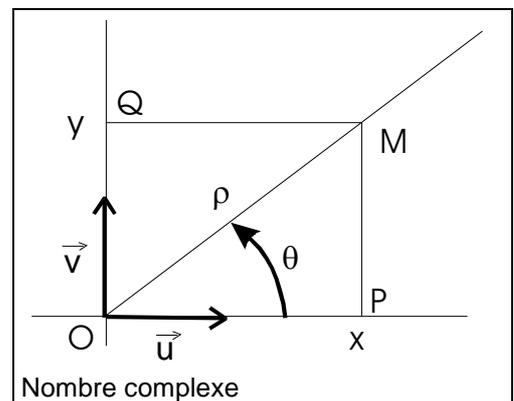
Représentation géométrique : $\vec{OM} = x \vec{u} + y \vec{v}$

Partie réelle : $\overline{OP} = x = \rho \cos \theta$

Partie imaginaire : $\overline{OQ} = y = \rho \sin \theta$

Conjugué : $z^* = x - jy = \rho e^{-j\theta}$

Module : $OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}$



3. Logarithmes – exponentielles - puissances

Népériens (base e) : $\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1 \quad \ln 10 = 2,303$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln a^n = n \ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Base 10 : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \log 2 = 0,301 \quad \log 10 = 1$

$x^0 = e^0 = 1 \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$x^{a+b} = x^a x^b \quad (x^a)^b = x^{ab}$

4. Dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

f(x)	a	x	x ⁿ	1/x	ln(x)	e ^{ax}	cos(x)	sin(x)	tan(x)	sin(ax+b)	sin ⁻¹ (x)
f'(x)	0	1	nx ⁿ⁻¹	-1/x ²	1/x	ae ^{ax}	-sin(x)	cos(x)	1+tan ² (x)	acos(ax+b)	1/√(1-x ²)

u + v	au	uv	1/u	u/v	e ^u	ln(u)	u ⁿ
u' + v'	au'	u'v + uv'	-u'/u ²	(u'v - uv')/v ²	e ^u u'	u'/u	nu ⁿ⁻¹ u'

5. Développements limités

Approximations d'usage

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\ (1+x)^n &= 1+nx \\ e^x &= 1+x \end{aligned}$$

D^{ts} limités à l'ordre 3

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\ e^x &= 1+x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

Formule de Mac Laurin (d^t l^{ie} à l'ordre n)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

6. Identités remarquables – Suites

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^2 + b^2 &= (a+ib)(a-ib) \end{aligned}$$

N termes ; 1^{er} terme a ; raison q

$$u_1 = a ; u_{n+1} = u_n + q \quad u_1 = a ; u_{n+1} = qu_n$$

Arithmétiques

$$S = N \frac{u_1 + u_N}{2}$$

Géométriques

$$S = a \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

7. Formules utiles en optique

$$\begin{aligned} A &= a + be^{j\varphi} \\ AA^* &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= a(1 + Re^{j\varphi} + R^2e^{2j\varphi} + \dots) \quad R < 1 \\ A &= a \frac{1}{1 - Re^{j\varphi}} \quad AA^* = \frac{a^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \\ AA^* &= \frac{a^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= a(1 + e^{j\varphi} + \dots + e^{j(N-1)\varphi}) \\ A &= a \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} \\ AA^* &= a^2 \frac{\sin^2 \left(N \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{iUx} dx = a \frac{\sin \left(\frac{Ua}{2} \right)}{\frac{Ua}{2}}$$

8. Incertitudes (sur la mesure directe d'une grandeur x)

Type B : Incertitude évaluée ou donnée $\pm \delta x \Rightarrow$ Incertitude-type $u_B(x) = \frac{\delta x}{\sqrt{3}}$

Type A : N mesures, distribution normale (gaussienne), écart-type $\sigma \Rightarrow$ Incertitude-type $u_A(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Incertitude-type composée: $u_C(x) = \sqrt{(u_A(x))^2 + (u_B(x))^2}$ Incertitude élargie: $\Delta x = 2u_C(x)$ Ecriture: $x = \bar{x} \pm \Delta x$

9. Incertitudes sur la mesure indirecte d'une grandeur z obtenue par mesures directes de x et y

$$z = x + y \quad \text{ou} \quad z = x - y$$

$$z = x \cdot y \quad \text{ou} \quad z = x/y$$

Ecriture

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

$$z = (\bar{z} \pm \Delta z) \text{ unité}$$

10. Chiffres significatifs et écriture d'un résultat de mesure

Pas plus de 2 c.s dans l'écriture d'une incertitude : Ex : $\pm 2,7 \text{ m}$; $\pm 0,85\%$

Même nombre de décimales dans la mesure et son incertitude écrite avec la même unité : $g = (9,809 \pm 0,020) \text{ m.s}^{-2}$